23/4/2018

Φυλλάδιο 3 ασκ. 1.

$G = (\mathbb{Z}, +)$ $\quad H = \langle 5 \rangle = 5\mathbb{Z}$

Βρείτε τις αριστερές πλευρικές κλάσεις της H στην G.

ΛΥΣΗ

Πιο γενικά, έστω $m \in \mathbb{Z}$ με $m > 0$ και $H = \langle m \rangle =$

$m\mathbb{Z}$. Τότε το σύνολο των αριστερών πλευρικών κλάσεων της H στην $G=(\mathbb{Z},+)$ έχει m στοιχεία τα εξής:

$$\{H=[0]_m,\ 1+H=[1]_m,\ 2+H=[2]_m, \dots, (m-1)+H=[m-1]_m\}$$

(Υπενθύμιση από Θ. Αριθμών $[r]_m=\{a\in\mathbb{Z} : a\equiv r \bmod m\}$

π.χ. $[1]_2$ = περιττοί ακέραιοι)

Άρα για $m=5$, οι αριστερές πλευρικές κλάσεις της $\langle 5\rangle = 5\mathbb{Z}$ είναι το σύνολο

$$\{[0]_5=H,\ [1]_5,\ [2]_5,\ [3]_5,\ [4]_5\}$$

Φυλλάδιο 3 ασκ. 2

α) $G=(\mathbb{Z}_{12},+)$ $\quad H=\langle[6]_{12}\rangle$

β) $G=\langle[2]_{12}\rangle$ $\quad H=\langle[6]_{12}\rangle$

<u>ΛΥΣΗ</u>

$$\mathbb{Z}_{12}=\{[0]_{12},[1]_{12},\dots,[11]_{12}\}$$

$$H=\{[6]_{12}\ [0]_{12}\}$$

Ο δείκτης $[\mathbb{Z}_{12}:H]=\dfrac{|\mathbb{Z}_{12}|}{|H|}=\dfrac{12}{2}=6$

Σύνολο αριστερών πλευρικών κλάσεων της H στην G: $\{[0]_{12}+H=H=\{[6]_{12},[0]_{12}\},\ [1]_{12}+H=\{[7]_{12},[1]_{12}\},$

$[2]_{12}+H=\{[8]_{12},[2]_{12}\},\ [3]_{12}+H=\{[9]_{12},[3]_{12}\},$

$[9]_{12}+H=\{[10]_{12},[4]_{12}\},\ [5]_{12}+H=\{[11]_{12},[5]_{12}\}$

Με άλλα λόγια, έχουμε διαμέριση του $\mathbb{Z}_{12}$ σε 6 υποσύνολα, καθένα με δύο στοιχεία.

β) Τώρα $G_1=\{[2]_{12},[4]_{12},[6]_{12},[8]_{12},[10]_{12},$

$[0]_{12}=[12]_{12}\}$

Έχουμε $[G_1 : H] = \frac{|G_1|}{|H|} = \frac{6}{2} = 3$

και οι αριστερές πλευρικές κλάσεις της H στην G_1 είναι το σύνολο $\{ [0]_{12} + H = H = \{[6]_{12}, [0]_{12}\}$

$[2]_{12} + H = \{[8]_{12}, [2]_{12}\}$ $[4]_{12} + H = \{[10]_{12}, [4]_{12}\}$

Φυλλάδιο 3 ασκ. 3

$$S_3 = \{ \overset{id}{\overset{\parallel}{\sigma_0}}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \}$$

$$H = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle \sigma_1 \rangle = \{\sigma_0, \sigma_1\}$$

$$[G : H] = \frac{|G|}{|H|} = \frac{6}{2} = 3$$

Αριστερές πλευρικές κλάσεις της H στην G

$\{ H = \{\sigma_0, \sigma_1\}, \sigma_2 * H = \{\sigma_2 \circ \sigma_0 = \sigma_2, \sigma_2 \circ \sigma_1 = \sigma_4\}$

$\sigma_3 * H = \{\sigma_3 \circ \sigma_0 = \sigma_3, \sigma_3 \circ \sigma_1 = \sigma_5\} \}$

Δεξιές πλευρικές κλάσεις

$\{ H = \{\sigma_0, \sigma_1\}, H * \sigma_2 = \{\sigma_0 \circ \sigma_2, \sigma_1 \circ \sigma_2\} = \{\sigma_2, \sigma_5\}$

$H * \sigma_3 = \{\sigma_0 \circ \sigma_3, \sigma_1 \circ \sigma_3\} = \{\sigma_3, \sigma_4\} \}$

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u> Σαν σύνολα αριστερές πλευρικές κλάσεις $\neq$ δεξιές πλευρικές κλάσεις.

Φυλλάδιο 3 ασκ. 11.

Θέτουμε $H = \{a \in \mathbb{R}^* : a > 0\}$

<u>ΙΣΧΥΡ. 1</u> H υποομάδα της G

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u> Φανερά $H \neq \emptyset$ γιατί $1 \in H$. Εστω $a, b \in H$. Τότε $b > 0 \Rightarrow b^{-1} > 0$. Άρα $ab^{-1} > 0$. Από πρόταση H υποομάδα της G.

<u>ΙΣΧΥΡ. 2</u> Το σύνολο των αριστερών πλευρικών κλάσεων της H στην G είναι το

$\{H, (-1)\cdot H\}$ άρα $[G:H]=2$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έχουμε $(-1)\cdot H = \{-a : a\in H\} = \{a\in\mathbb{R} : a<0\}$

Άρα $\mathbb{R}^* = H \cup (-1)\cdot H$. Το αποτέλεσμα έπεται.

Φυλλάδιο 3 Ασκ. 10

a) Από πρόταση $H\cap K$ υποομάδα της G. Έστω $d = \#(H\cap K)$. Αφού $H\cap K$ υποομάδα της G, έχουμε $H\cap K$ υποομάδα της H. Άρα από Θ. Lagrange

$\#(H\cap K) \mid \#H \Rightarrow \#(H\cap K) \mid p \Rightarrow$

$\# H\cap K = p$ ή $\# H\cap K = 1$

Υποθέτουμε $\# H\cap K = p$. Αφού $H\cap K$ υποομάδα της G έχουμε $H\cap K$ υποομάδα της K, άρα από Θ. Lagrange $p = \# H\cap K \mid |K|$, αντίφαση

Άρα, $\#(H\cap K) = 1 \Rightarrow H\cap K = \{e\}$

b) Όπως στο a) $\# H\cap K = 1$ ή p. Υποθέτουμε $\# H\cap K = p$. Τότε $\left.\begin{array}{l} H\cap K \subseteq H \\ \text{και } \#(H\cap K) = \#H = p \end{array}\right\} \Rightarrow H\cap K = H$

Επίσης, $\left.\begin{array}{l} H\cap K \subseteq K \\ \text{και } \# H\cap K = \#K = p \end{array}\right\} \Rightarrow K = H\cap K$. Συνεπώς $H = H\cap K = K$, αντίφαση

Συνεπώς $\#(H\cap K) = 1 \Rightarrow H\cap K = \{e\}$

Φυλλάδιο 3 ασκ. 12

Λύση $24 = 2^3\cdot 3$ $54 = 2\cdot 3^3$

Έστω $d = \#G$. Τότε από Θ. Lagrange $\#H \mid d \Rightarrow 2^3\cdot 3 \mid d$

Επίσης, από Θ. Lagrange $\#K \mid d \Rightarrow 2\cdot 3^3 \mid d$

$\Rightarrow \underbrace{2^3\cdot 3^3}_{216} \mid d$. Άρα $216 \mid d$. Άρα αφού $d < 300$ και $d \geq 54 \Rightarrow d = 216$.

ΟΜΟΜΟΡΦΙΣΜΟΙ ΟΜΑΔΩΝ

$\phi : (G_1, *_1) \to (G_2, *_2)$ $\phi(a *_1 b) = \phi(a) *_2 \phi(b)$ $\forall a,b \in G_1$

ΟΜΟΜ. ΟΜΑΔΩΝ

Δείξαμε ϕ ομομορφισμός $\Rightarrow \phi(e_{G_1}) = e_{G_2}$ και $(\phi(a))^{-1} = \phi(a^{-1})$ $\forall a \in G_1$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

1) Έστω $s\in\mathbb{Z}$ $\phi : (\mathbb{Z},+) \to (\mathbb{Z},+)$ $\phi(a) = s\cdot a$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ $\phi(a+b) = s(a+b) = sa + sb = \phi(a) + \phi(b)$

2) $\phi : (\mathbb{R}\setminus\{0\}, \cdot) \to (\mathbb{Z}_2, +)$ $\quad \phi(a) = \begin{cases} [0]_2, & \text{αν } a>0 \\ [1]_2, & \text{αν } a<0 \end{cases}$

$\mathbb{R}\setminus\{0\} = \mathbb{R}^*$

π.χ. $\phi\left(-\frac{1}{2}\right) = [1]_2 \quad \phi(2018) = [0]_2$

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ ϕ. ΟΜΟΜ. ΟΜΑΔΩΝ

Δηλαδή αν $a,b \in \mathbb{R}^*$ $\phi(a \cdot b) = \phi(a) + \phi(b)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1. $a,b>0$. Τότε $a \cdot b > 0$

Άρα $\phi(ab) = [0]_2 \quad \phi(a)+\phi(b) = [0]_2 + [0]_2 = [0]_2$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2. $a>0 \quad b<0$. Τότε $ab<0 \Rightarrow$

$\phi(ab) = [1]_2$ και $\phi(a)+\phi(b) = [0]_2 + [1]_2 = [1]_2$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3 $a<0 \quad b>0$. Τότε $ab<0 \Rightarrow$

$\phi(ab) = [1]_2 \quad \phi(a)+\phi(b) = [1]_2 + [0]_2 = [1]_2$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 4 $a<0 \quad b<0$ Τότε $ab>0 \Rightarrow$

$\phi(ab) = [0]_2$ και $\phi(a)+\phi(b) = [1]_2 + [1]_2 = [2]_2 = [0]_2$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ $(G,*)$ ομάδα $\phi = id_G : G \to G$, δηλ. $\phi(a) = a$ $\forall a \in G$. ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ ϕ ομομορφισμός ομάδων.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ $\phi(a*b) = a*b$ ενώ $\phi(a)*\phi(b) = a*b$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ G ομάδα, H υποομάδα της G, $\phi = i : H \to G$ η ένθεση, δηλ. $\phi(a) = a$ για κάθε $a \in H$. Όπως στο προηγούμενο παράδειγμα ϕ ομομ. ομάδων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ $G_1 = GL_n(\mathbb{R}) = \{n \times n$ αντιστρέψιμοι πραγματικοί πίνακες$\}$

$G_2 = (\mathbb{R}^*, \cdot) \quad \phi : G_1 \to G_2 \quad \phi(M) = \det M$

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ. ϕ ομομ. ομάδων

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Αφού M αντιστρέψιμος, από Γρ. Άλγεβρα $\det M \neq 0$. Άρα ϕ καλά ορισμένη. Τώρα πάλι Γραμ. Άλγεβρα $\phi(M_1 M_2) = \det(M_1 M_2) = \det(M_1) \cdot \det(M_2) = \phi(M_1) \cdot \phi(M_2)$

ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω G_1, G_2 ομάδες $\phi : G_1 \to G_2$ με $\phi(a) = e_{G_2}$ για κάθε $a \in G_1$.

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ ϕ ομομ. ομάδων
ΑΠΟΔΕΙΞΗ $\phi(a *_1 b) = e = e *_2 e = \phi(a) *_2 \phi(b)$
Η ϕ λέγεται ΤΕΤΡΙΜΕΝΟΣ ΟΜΟΜΟΡΦΙΣΜΟΣ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ $\phi : (\mathbb{R}\setminus\{0\}, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$
όπου $\mathbb{R}_{>0} = \{a \in \mathbb{R} : a > 0\}$ με $\phi(a) = |a|$ <- απόλυτη τιμή

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ ϕ ομομ. ομάδων
ΑΠΟΔΕΙΞΗ $\phi(ab) = |ab| = |a|\cdot|b| = \phi(a)\cdot\phi(b)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ $\phi : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$
$\phi(a) = e^{a}$

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ ϕ ισομ. ομάδων δηλ. ϕ ομομ. ομάδων που είναι 1-1 και επί
ΑΠΟΔΕΙΞΗ $\phi(a+b) = e^{a+b} = e^{a}\cdot e^{b} = \phi(a)\cdot\phi(b)$
άρα ϕ ομομορφισμός ομάδων. Άρα από Απειρ. Λογισμό ϕ 1-1 και επί.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Έστω $(G, *)$ ομάδα, $a \in G$
$\phi : (\mathbb{Z}, +) \to G \quad \phi(s) = a^{s}$
ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ ϕ ομομορφισμός ομάδων

ΑΠΟΔΕΙΞΗ $\phi(s_1 + s_2) = a^{s_1+s_2} = a^{s_1} * a^{s_2} = \phi(s_1) * \phi(s_2)$

ΠΡΟΤΑΣΗ (Μεταβατικότητα)
Έστω $(G_1, *_1), (G_2, *_2), (G_3, *_3)$ τρεις ομάδες και $\phi_1 : G_1 \to G_2$ $\quad \phi_2 : G_2 \to G_3$ δυο ομομορφισμοί ομάδων. Τότε η σύνθεση $\phi_2 \circ \phi_1 : G_1 \to G_3$ είναι ομομορφισμός ομάδων.
ΑΠΟΔΕΙΞΗ $(\phi_2\circ\phi_1)(a *_1 b) = \phi_2(\phi_1(a *_1 b)) \overset{\phi_1 \text{ ομομ. ομάδων}}{=}$

$\phi_2(\phi_1(a) *_2 \phi_1(b)) \underset{\phi_2 \text{ ομομ. ομάδων}}{=} (\phi_2(\phi_1(a))) *_3 (\phi_2(\phi_1(b))) =$

$((\phi_2\circ\phi_1)(a)) *_3 ((\phi_2\circ\phi_1)(b))$ Άρα $\phi_2\circ\phi_1$ ομομορφισμός.

ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω $\phi : G_1 \to G_2$ ομομ. ομάδων $a \in G_1$
$k \in \mathbb{Z}$. Τότε $\phi(a^{k}) = (\phi(a))^{k}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Για $k=0$ $\phi(a^k)=\phi(a^0)=\phi(e_{G_1}) \overset{\text{πρόταση}}{=} e_{G_2} = (\phi(a))^0$

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ Για $k\geq 1$ $\phi(a^k)=(\phi(a))^k$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Με επαγωγή στο k. Για $k=1$ $\phi(a)=\phi(a)$ που ισχύει. Υποθέτουμε $\phi(a^k)=(\phi(a))^k$.

Τότε $\phi(a^{k+1})=\phi(a^k *_1 a) \overset{\text{ΦΟΝΟΜ.}}{=} \phi(a^k) *_2 \phi(a) \underset{\text{ΕΠΑΓ. ΥΠΟΘ.}}{=} (\phi(a))^k *_2 \phi(a) = (\phi(a))^{k+1}$ Άρα ισχύει.

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ Για $k\leq -1$ ισχύει $\phi(a^k)=(\phi(a))^k$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Ξέρουμε $\phi(a^k)=\phi((a^{-1})^{|k|}) \overset{\text{ΑΠΟ ΠΑΡΑΠΑΝΩ}}{=} (\phi(a^{-1}))^{|k|} \underset{\text{ΠΡΟΤΑΣΗ}}{=} ((\phi(a))^{-1})^{|k|} = (\phi(a))^{-|k|} = (\phi(a))^k$

ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω $\phi: G_1 \to G_2$ ομομορφισμός ομάδων

1) Αν H υποομάδα της G_1, τότε $\phi(H)$ υποομάδα της G_2.

2) Αν L υποομάδα της G_2, τότε $\phi^{-1}(L)$ υποομάδα της G_1.

(Με άλλα λόγια εικόνα και αντίστροφη εικόνα υποομάδας μέσω ομομορφισμού ομάδων είναι υποομάδα)

(ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ: $\phi(H)=\{\phi(a): a\in H\}$ $\phi^{-1}(L)=\{b\in G_1: \phi(b)\in L\}$)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

1) Θα δείξουμε $\phi(H)\neq\emptyset$ και $a,b\in\phi(H) \Rightarrow a *_2 b^{-1} \in H$. Τότε από πρόταση $\phi(H)$ υποομάδα της G_2. Αφού $H\neq\emptyset$ σαν υποομάδα της $G_1 \Rightarrow \phi(H)\neq\emptyset$. Έστω $a,b\in\phi(H)$. Άρα υπάρχουν $\tilde{a},\tilde{b}\in H$ με $a=\phi(\tilde{a})$ $b=\phi(\tilde{b})$. Τότε $a *_2 b^{-1} = (\phi(\tilde{a})) *_2 (\phi(\tilde{b}))^{-1} \underset{\text{ΦΟΝΟΜ.}}{=} \phi(\tilde{a}) *_2 (\phi(\tilde{b}^{-1})) \underset{\text{ΦΟΝΟΜ.}}{=} \phi(\tilde{a} *_1 \tilde{b}^{-1})$

Αλλά H υποομάδα της G_1 και $\tilde{a}, \tilde{b} \in H \Rightarrow$
$\tilde{a} *_1 (\tilde{b})^{-1} \in H$. Άρα $a *_2 b^{-1} \in \phi(H)$

2) Θα δείξουμε $\phi^{-1}(L) \neq \emptyset$ και $a, b \in \phi^{-1}(L) \Rightarrow$
$a *_1 b^{-1} \in \phi^{-1}(L)$. Αφού L υποομ. της $G_2 \Rightarrow$
$e_{G_2} \in L$. Άρα αφού $\phi(e_{G_1}) = e_{G_2}$
$e_{G_1} \in \phi^{-1}(L) \Rightarrow \phi^{-1}(L) \neq \emptyset$.

Έστω $a, b \in \phi^{-1}(L)$. Τότε $\phi(a), \phi(b) \in L$. Αφού
L υποομάδα $(\phi(a)) *_2 ((\phi(b))^{-1} \in L$, άρα
$\phi(a) *_2 \phi(b^{-1}) \in L \Rightarrow \phi(a *_1 b^{-1}) \in L \Rightarrow$
$a *_1 b^{-1} \in \phi^{-1}(L)$
Συνεπώς $\phi^{-1}(L)$ υποομάδα της G_1.

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u> Έστω $\phi_1 : G_1 \to G_2$ ομομ. ομάδων και
$a \in G_1$ με $\mathrm{ord}(a) < \infty$. Τότε $\mathrm{ord}(\phi(a)) < \infty$
και $\mathrm{ord}(\phi(a)) \mid \mathrm{ord}(a)$
(Παραδ. Αν $\mathrm{ord}(a) = 6$ τότε $\mathrm{ord}(\phi(a)) \in \{1, 2, 3, 6\}$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u> Έστω $d_1 = \mathrm{ord}(a)$ $d_2 = \mathrm{ord}(\phi(a))$

Έχουμε $(\phi(a))^{d_1} \underset{\text{ΠΡΟΤΑΣΗ}}{=} \phi(a^{d_1}) = \phi(e_{G_1}) = e_{G_2}$ Άρα $d_2 \mid d_1$.

<u>ΕΦΑΡΜΟΓΗ</u> Βρείτε όλους τους ομομορφισμούς
ομάδων από την $(\mathbb{Z}_5, +)$ στην $(\mathbb{Z}_4, +)$

<u>ΛΥΣΗ</u> Έστω $\phi : \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_4$ $\phi([a]_5) = [0]_4$

Ο ϕ είναι ομομορφισμός ομάδων
<u>ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ</u> Έστω $\varphi : \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_4$ ομομ. ομάδων.

Τότε $\varphi = \phi$ (Με άλλα λόγια υπάρχει μοναδικός
ομομ. ομάδων από το $\mathbb{Z}_5$ στο $\mathbb{Z}_4$ ο ϕ)

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Έχουμε $\mathbb{Z}_5 = \{[0]_5, [1]_5, \dots, [4]_5\}$

Έχουμε από πρόταση ότι $ord(\varphi([1]_5)) \mid ord([1]_5)$
άρα $ord(\varphi[1]_5) \mid 5$ (1)
Αλλά $\varphi([1]_5) \in \mathbb{Z}_4$. Από Θ. Lagrace
$ord(\varphi([1]_5)) \mid \#\mathbb{Z}_4 = 4$ (2)

Από (1) και (2)

$ord(\varphi[1]_5) \mid \text{ΜΚΔ}(5,4) = 1$
Άρα $ord(\varphi[1]_5) = 1 \Rightarrow \varphi([1]_5) = [0]_4 \in \mathbb{Z}_4$
Άρα και $\varphi([2]_5) = \varphi([1]_5 + [1]_5) = \varphi([1]_5) + \varphi([1]_5) =$
$[0]_4 + [0]_4$ και ομοίως $\varphi[3]_5 = [0]_4$ και
$\varphi[4]_5 = [0]_4$ Συνεπώς η φ στέλνει κάθε στοιχείο
του $\mathbb{Z}_5$ στο $[0]_4$ άρα $\varphi = \Phi$.